2019학년도 전공수학 중등교원임용시험 대비

정현민 전공수학

해석학 이론

정 현 민 편저

박문각교육
박문각임용고시학원
(구) 노량진행정고시학원 www.ngosi.co.kr 02) 816-2030

해석학 이론 목차

Chapter 2 실수계 ······ 5

Chapter 3 수열과 급수 ······ 16

Chapter 4 극한 ······ 40

Chapter 5 연속함수 ······ 52

Chapter 6 미분 ······ 72

Chapter 7 Riemann 적분 ······ 98

Chapter 8 함수열 ······ 128

Chapter 9 무한급수 ······ 142

Chapter 10 이중적분, 그린정리 ······ 165

제 2장 실수계

2.1 $\mathbb{R}$의 대수적 성질과 순서성질

정리 2.1.1 $a, b \in \mathbb{R}$ 라 하자.
(1) 모든 $\epsilon > 0$에 대하여 $0 \le a < \epsilon$이면 $a = 0$이다.
(2) 모든 $\epsilon > 0$에 대하여 $a < b + \epsilon$이면 $a \le b$이다.
(3) $L > 1$인 임의의 $L \in \mathbb{R}$에 대하여 $a \le bL$이면 $a \le b$이다.

『증명』

2.2 부등식

정리 2.2.1 (삼각부등식) $a, b \in \mathbb{R}$이면 $|a+b| \le |a| + |b|$이다.

『증명』

정리 2.2.2 $a, b \in \mathbb{R}$ 이면 다음이 성립한다.

(a) $||a|-|b|| \le |a-b|$ (b) $|a-b| \le |a|+|b|$

『증명』

정리 2.2.3 (Bernoulli 부등식)

$x > -1$이면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $(1+x)^n \ge 1+nx$이 성립한다.

『증명』

2.3 $\mathbb{R}$ 의 완비성

정의 2.3.1 S를 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이라 하자.

(a) 모든 $s \in S$에 대하여 $s \le u$가 되는 수 $u \in \mathbb{R}$가 존재하면, 집합 S는 **위로 유계이다(bounded above)**라고 한다. 각각의 그러한 수 u를 S의 **상계(upper bound)**라 한다.

(b) 모든 $s \in S$에 대하여 $w \le s$가 되는 수 $w \in \mathbb{R}$가 존재하면, 집합 S는 **아래로 유계이다(bounded below)**라고 한다. 각각의 그러한 수 w를 S의 **하계(lower bound)**라 한다.

(c) 한 집합이 위로 유계이고 동시에 아래로 유계일 때, 이 집합은 **유계이다(bounded)**라고 한다. 집합이 유계가 아니면, 이는 **유계가 아니다(unbounded)**라고 한다.

정의 2.3.2 S를 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이라 하자.

(a) S가 위로 유계일 때, 다음 조건을 만족하는 수 u를 S의 **상한(supremum)** 또는 **최소상계(least upper bound)**라 하고 $\sup S$라 표기한다.
 (1) u는 S의 상계이다.
 (2) v가 S의 임의의 상계이면 $u \le v$이다.

(b) S가 아래로 유계일 때, 다음 조건을 만족하는 수 w를 S의 **하한(infimum)** 또는 **최대 하계(greatest lower bound)**라 하고 $\inf S$라 표기한다.
 (1) w는 S의 하계이다.
 (2) t가 S의 임의의 하계이면 $t \le w$이다.

정리 2.3.1 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 S의 상계 u에 대하여 다음은 동치이다.
(1) u 는 S의 상한이다.
(2) 각 $\epsilon > 0$에 대하여 $u-\epsilon < s_\epsilon \le u$이 되는 $s_\epsilon \in S$이 존재한다.
(3) $v < u$인 임의의 v에 대하여 $v < s$인 $s \in S$가 존재한다.

『증명』

정리 2.3.2 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합 S의 하계 u에 대하여 다음은 동치이다.
(1) u 는 S의 하한이다.
(2) 각 $\epsilon > 0$에 대하여 $u \le s_\epsilon < u + \epsilon$이 되는 $s_\epsilon \in S$이 존재한다.
(3) $u < v$인 임의의 v에 대하여 $s < v$인 $s \in S$가 존재한다.

『증명』

예제 2.3.1

(1) 집합 $A(\neq \varnothing)$에 대하여 상한이 존재하면 유일함을 증명하시오.
(2) 공집합이 아니고 유계인 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이면

$$\inf A \ge \inf B,\ \sup A \le \sup B$$

가 성립함을 증명하시오.

『풀이』

2.3.3 **($\mathbb{R}$ 의 완비성)** 상계를 갖는 공집합이 아닌 모든 실수의 집합은 $\mathbb{R}$ 에서 상한을 갖는다.

정리 2.3.3 아래로 유계이고 공집합이 아닌 $\mathbb{R}$ 의 부분집합은 하한을 갖는다.

『증명』

2.4 상한성의 응용

정리 2.4.1 공집합이 아닌 유계 집합 $A, B \subset \mathbb{R}$ 와 임의의 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에대하여 집합 $A+B$ 와 λA 를 각각

$$A+B=\{a+b \mid a \in A,\, b \in B\},\quad \lambda A=\{\lambda a \mid a \in A\}$$

라고 정의할 때, 다음이 성립한다.

(a) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

(b) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

(c) $\sup \lambda A=\begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}$

(d) $\inf \lambda A=\begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda \geq 0 \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}$

『증명』

예제 2.4.1

(a) 위로 유계인 $S(\neq \varnothing)\subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $a+S := \{a+s \mid s\in S\}$라 하면 $\sup(a+S) = a+\sup S$ 이다.

(b) A와 B가 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분집합으로 모든 $a\in A$와 $b\in B$에 대하여 $a \leq b$를 만족하면 $\sup A \leq \inf B$가 성립한다.

『풀이』

예제 2.4.2

$A_1, A_2, \cdots, A_n$는 $\mathbb{R}$ 의 부분집합이고 $c_1, c_2, \cdots, c_n, L$는 실수이다.
임의의 $a_i \in A_i (i=1, 2, \cdots, n)$에 대하여

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n < L$$

이면

$$c_1 \sup A_1 + c_2 \sup A_2 + \cdots + c_n \sup A_n \leq L$$

이 성립한다.

『풀이』

예제 2.4.3

A는 공집합이 아니고 유계인 $\mathbb{R}$의 부분집합이다.
임의의 $a \in A$에 대하여 $a \geq 0$이면 $\sup(A^2) = (\sup A)^2$이 성립한다.

『풀이』

정리 2.4.2 (Archimedes의 성질) $x \in \mathbb{R}$이면, $x < n_x$가 되는 $n_x \in \mathbb{N}$가 존재한다.

따름정리 2.4.3 $t > 0$이면, $0 < \dfrac{1}{n_t} < t$가 되는 $n_t \in \mathbb{N}$가 존재한다.

따름정리 2.4.4 $y > 0$이면, $n_y - 1 \leq y < n_y$가 되는 $n_y \in \mathbb{N}$가 존재한다.

정리 2.4.5 (조밀성의 정리)
x와 y가 $x < y$인 임의의 실수이면, $x < r < y$인 유리수 $r \in \mathbb{Q}$이 존재한다.

『증명』

유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하시오. 즉, x와 y가 실수이고 $x < y$이면, $x < r < y$를 만족시키는 유리수 r이 존재함을 보이시오. [2005]

정리 2.4.6 x와 y가 $x<y$인 실수이면, $x<z<y$인 무리수 z가 존재한다.

『증명』

2.5 구간

정리 2.5.1 (축소구간성질)
$I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$이 유계인 축소폐구간열이면, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\xi \in I_n$인 수 $\xi \in \mathbb{R}$가 존재한다.

『증명』

정리 2.5.2 $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$이 유계인 축소폐구간열이고 I_n의 길이 $b_n - a_n$이 $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$을 만족하면, 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 I_n에 포함 되는 수 ξ는 유일하다.

『증명』

정리 2.5.3 단위구간 $[0,1]:=\{x\in\mathbb{R}\ :\ 0\le x\le 1\}$은 가산이 아니다. 따라서 $\mathbb{R}$은 가산이 아니다.

『증명』

제 3장 수열과 급수

3.1 수열과 수열의 극한

정의 3.1.1 **실수열(sequence of real numbers)** 또는 $\mathbb{R}$ 에서의 **수열(sequence in $\mathbb{R}$)**은 자연수의 집합 $\mathbb{N}$ 에서 정의되고 치역이 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 에 포함되는 함수이다.

정의 3.1.2 (x_n)을 실수열이라 하고 $x \in \mathbb{R}$ 라 하자. 모든 $\epsilon > 0$에 대하여 $n \geq K(\epsilon)$이면 $|x_n - x| < \epsilon$을 만족하는 자연수 $K(\epsilon)$이 존재하면, (x_n)은 x로 **수렴한다(converges)**라고 하거나 x를 (x_n)의 **극한(limit)**이라 한다. 그리고 $\lim_{n \to \infty} x_n = x$로 표기한다. 수열이 극한을 가지면, 그 수열은 **수렴한다(convergent)**라 하고 수열이 극한을 갖지 않으면, 그 수열은 **발산한다(divergent)**라고 한다.

예제 3.1.1

임의의 자연수 n에 대하여 $x_n = a$인 상수수열은 a에 수렴한다.

『풀이』

정리 3.1.1 (극한의 유일성) 실수열은 많아야 하나의 극한을 갖는다.

『증명』

정리 3.1.2 (x_n)을 실수열이라 하고 $x \in \mathbb{R}$이라 하자. (a_n)이 $\lim a_n = 0$인 양의 실수열이고 $C > 0$와 $m \in \mathbb{N}$에 대하여 $n \geq m$일 때 $|x_n - x| \leq Ca_n$이면 $\lim x_n = x$이다.

『증명』

예제 3.1.2

(a) $c > 0$이면 $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$ 이다.

(b) $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$ 이다.

『풀이』

3.2 극한정리

정의 3.2.1 (x_n)을 실수열이라 하자. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $|x_n| \le M$이 되는 실수 $M > 0$이 존재하면 (x_n)은 **유계이다(bounded)**라고 한다.

정리 3.2.1 수렴하는 실수열은 유계이다.

『증명』

정리 3.2.2

(a) (x_n)과 (y_n)을 각각 x와 y로 수렴하는 실수열이라 하고 $c \in \mathbb{R}$라 하자. 그러면 수열 $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$, (cx_n)는 각각 $x+y$, $x-y$, xy, cx로 수렴한다.

(b) (x_n)이 x로 수렴하고 (z_n)이 z로 수렴하는 영이 아닌 실수열이며 $z \ne 0$이면 수열 (x_n / z_n)은 x/z로 수렴한다.

『증명』

정리 3.2.3 $n > m$인 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n > a$이고 (x_n)이 x에 수렴하면 $x \geq a$가 성립한다. (m은 고정된 자연수)

『증명』

정리 3.2.4 (x_n), (y_n), (z_n)이 $n > m$인 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x_n \leq y_n \leq z_n$이고 (x_n), (z_n)이 모두 a에 수렴하면 (y_n) 역시 a에 수렴한다. (m은 고정된 자연수)

『증명』

예제 3.2.1

$0 < a < b$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} (a^n + b^n)^{1/n}$의 값을 구하여라.

『풀이』

정리 3.2.5 임의의 실수 x에 대하여 x에 수렴하는 유리수열, 무리수열이 존재한다.

『증명』

예제 3.2.2

(a) (x_n)을 $x \in \mathbb{R}$로 수렴하는 실수열이라 하면 실계수 다항식

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

에 대하여 $(p(x_n))$은 $p(x)$로 수렴한다.

(b) (x_n)을 $x \in \mathbb{R}$로 수렴하는 실수열이라 하고 $r(t) = p(t)/q(t)$을 유리함수라 하자. 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $q(x_n) \neq 0$이고 $q(x) \neq 0$이라 가정하면 수열$(r(x_n))$은 $p(x)/q(x)$로 수렴한다.

『풀이』